السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 :

$\cos ~ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، $0 < ~ < \frac{®}{2}$

1

أ) لدينا: $\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{8+4\sqrt{3}}{8} = 1 - \frac{8+2\sqrt{12}}{16} 2 = 1 - (~)^2\cos 2 = ~\cos 2$

ب) لدينا $0 < ~ < \frac{®}{2}$ إذن : $0 < 2~ < ®$ ، و بما أن : $\cos 2~ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $2~ = \frac{®}{6}$ منه: $\boxed{~ = \frac{®}{12}}$

2

$\tan \;\; = 2+\sqrt{3}$ ، $0 < \;\; < \frac{®}{2}$

أ) لدينا: $\tan 2 \;\; = \frac{2\tan}{1-\tan^2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1-(7+4\sqrt{3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{-6-4\sqrt{3}} = \frac{-(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}} = \frac{-(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

ب) لدينا $0 < \;\; < \frac{®}{2}$ منه: $0 < 2 \;\; < ®$ و بما أن: $\tan 2 \;\; = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ فإن: $2 \;\; = \frac{5®}{6}$ بالتالي: $\boxed{\;\; = \frac{5®}{12}}$

من الضروري حفظ النسب المثلثية للزوايا الخاصة : $\frac{®}{3}$ و $\frac{®}{6}$ و $\frac{®}{4}$ وبقية النسب يمكنك استخراجها مستعملا الدائرة المثلثية أو خاصيات الحساب المثلثي. فمثلا $\tan\left(\frac{5®}{6}\right) = \tan\left(® - \frac{®}{6}\right) = \tan\left(-\frac{®}{6}\right) = -\tan\left(\frac{®}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

تمرين 2 : $\cos ~ = \frac{3}{5}$ ، $0 < ~ < \frac{®}{2}$

نعلم أن: $\sin^2 ~ + \cos^2 ~ = 1$ منه: $\sin^2 ~ + \frac{9}{25} = 1$ منه: $\sin^2 ~ = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

و بما أن: $0 < ~ < \frac{®}{2}$ فإن: $\sin ~ > 0$ منه : $\sin ~ = \frac{4}{5}$ بالتالي : $\sin 2~ = 2\sin ~ \cos ~ = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

لدينا:

$$\cos 3~ = \cos(2~ + ~) = \cos 2~ .\cos ~ - \sin 2~ .\sin ~ = (2\cos^2 ~ - 1)\cos ~ - \sin 2~ .\sin ~$$

$$\cos 3~ = \left(\frac{18}{25} - 1\right) \times \frac{3}{5} - \frac{24}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{-7}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{96}{125} = \frac{-117}{125}$$

لا يجب نسيان تطبيق الخاصية الأساسية للحساب المثلثي $\sin^2(~) + \cos^2(~) = 1$ كلما دعت الحاجة لذلك.

تمرين 3 :

1 لدينا: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\right) = 1 + \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 1 + \sin x$

2 لدينا: $x \neq \frac{®}{2} + k® \;/ k \in Z \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

3 لدينا:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$\cos^4 x - \sin^4 x = 1 \times (\cos x \cos x - \sin x \sin x)$ بالتالي: $\forall x \in IR \quad \cos^4 x = \cos 2x + \sin^4 x$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(x+x) = \cos(2x)$$

4 لدينا:

$$A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + +3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x.\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A = \sin^4 x + 2\sin^2 x.\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

تمرين 4 : $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sqrt{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$ ، $(x, y) \in \left[0, \frac{®}{2}\right]^2$

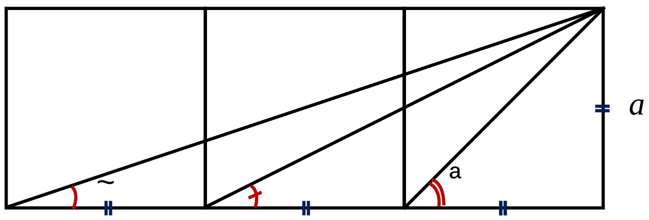
1 لدينا :

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y-\sqrt{2}\cos y+\frac{1}{2}+\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y+\cos^2 x-\sqrt{2}(\cos y+\cos x)+1=1-2+1=0$$

2 من السؤال السابق نستنتج أن : $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و بما أن $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$ فإن : $x=y=\frac{\pi}{4}$

تمرين 5 :



1 لدينا: $\tan\alpha=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$ و $\tan\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

2 لدينا : $\tan\theta=\frac{a}{a}=1$ و $\tan(\alpha+\ \ )=\frac{\tan\alpha+\tan\ \ }{1-\tan\alpha\tan\ \ }=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

منه: $\tan(\alpha+\ \ )=1$

ولدينا : $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{1}{2}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}\tan\ \ =\frac{1}{3}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\ \ <\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\ \ <\frac{\pi}{4}$

منه: $0<\alpha+\ \ <\frac{\pi}{2}$

الآن : $\begin{cases}0<\alpha+\ \ <\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\ \ )=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\ \ =\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}0<\alpha+\ \ <\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\ \ )=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\ \ =\frac{\pi}{4}$ بالتالي : $\boxed{\alpha+\ \ =\theta}$

فكرة التمرين واضحة: للبرهان على تساوي زاويتين نبرهن على تساوي إحدى النسب المثلثية (في المثال الظل) مع إمكانية تطبيق قواعد الجمع و الطرح، لكن يجب الانتباه أن الاستنتاج لا يكون كاملا إلا إذا برهنا أن الزاويتين تنتميان معا لمجال من الشكل $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k\in Z$ لأن العبارة : $\tan x=\tan y\Rightarrow x=y$ لا تكون صحيحة إلا مع الشرط السابق.